Formes de HANKEL

[CALDERO-GERMONI 1, p 356]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x_1, \ldots, x_t$ ses racines distinctes et $m_1, \ldots, m_t$ leur multiplicité respective. Il existe une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de rang t telle que sa signature soit $\left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$ où r désigne le nombre de racines réelles de P.

DÉVELOPPEMENT :

Démonstration. On pose, pour $k \geq 0$, $s_k = \sum_{\ell=1}^t m_\ell x_\ell^k$ et on considère l'application :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (X_0, \ldots, X_{n-1}) & \longmapsto & \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j \end{array}$$

σ est un polynôme homogène de degré 2, il s'agit donc d'une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$. Considérons $\sigma|_{\mathbb{R}}$ sa restriction à $\mathbb{R}^n$. Alors $\sigma|_{\mathbb{R}}$ est une forme quadratique réelle. En effet, les (s_k) étant symétriques en les racines de P, on a $\overline{s_k} = s_k \in \mathbb{R}$. Donc $\sigma(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$. On considère, pour $1 \leq k \leq t$, la forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$ définit par le polynôme homogène de degré 1 :

$$\forall (X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \quad \varphi_k((X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i x_k^i$$

Voyons que les $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ forment une famille libre de l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{C}^n$. En considérant $(e_i^*)_{0 \leq i \leq n-1}$ la base duale de la base canonique $(e_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ de $\mathbb{C}^n$ on a, pour $k \in \{1, 2, \ldots, t\}$,

$$\varphi_k = \sum_{i=0}^{n-1} e_i^* x_k^i$$

D'où la représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_t \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_t^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,t}(\mathbb{C})$$

$\square$

On reconnaît ici une matrice de VANDERMONDE qui est inversible par hypothèse sur les $(x_i)_{1 \leq i \leq t}$ qui sont distincts deux à deux. Ainsi, chaque mineur de taille $p \times p$ est de rang p, d'où l'indépendance des $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq t}$. En considérant maintenant $\sum_{k=1}^t m_k \varphi_k^2$, on remarque que les coefficients devant $X_i X_j$ sont :

$$\begin{cases} 2 \sum_{k=1}^t m_k x_k^{i+j} = 2 s_{i+j} \text{ si } i \neq j \\ \sum_{k=1}^t m_k x_k^{2i} = s_{2i} \text{ si } i = j \end{cases}$$

On remarque qu'il s'agit exactement des coefficients de σ devant les $X_i X_j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ donc $\sigma = \sum_{k=1}^t m_k \varphi_k^2$. De plus si x_k n'est pas réel, alors $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\Re(\varphi_k)^2 - 2\Im(\varphi_k)^2$ et comme $x_k \neq \overline{x_k}$, il est clair que la matrice représentant les formes linéaires φ_k et $\overline{\varphi_k}$ dans la base duale $(e_i^*)_{0 \leq i \leq n-1}$ qui est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (il suffit de prendre le mineur des 2 premières lignes pour s'en rendre compte). Ainsi $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$ est une forme quadratique de rang 2 et de signature $(1, 1)$. Il est évident que, si $x_k \in \mathbb{R}$, alors φ_k^2 est une forme quadratique réelle de rang 1 (car $\varphi_k \neq 0$) et de signature $(1, 0)$.

Ainsi, comme $\sigma = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$, en regroupant les φ_k et leur conjugué entre eux pour x_k non réel, il vient que $\sigma|_{\mathbb{R}}$ est une forme quadratique réelle de rang t et de signature :

$$sgn(\sigma|_{\mathbb{R}}) = (r, 0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2}\right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$$

<u>Remarques</u> :

- Une application simple au polynôme $P(X) = X^2 - bX + c$: on a $\sigma(x_0, x_1) = 2\left(x_0 + \frac{b}{2}x_1\right)^2 + \left(\frac{b^2-4c}{2}\right)x_1^2$ après une réduction de GAUSS et l'étude du signe de $b^2 - 4c$ nous donne le résultat bien connu des polynômes de degré 2.